



*Étude d'un asservissement de position échantillonné*

# Étude d'un asservissement de position échantillonné



Guillaume Ponnier



Pierre Orient

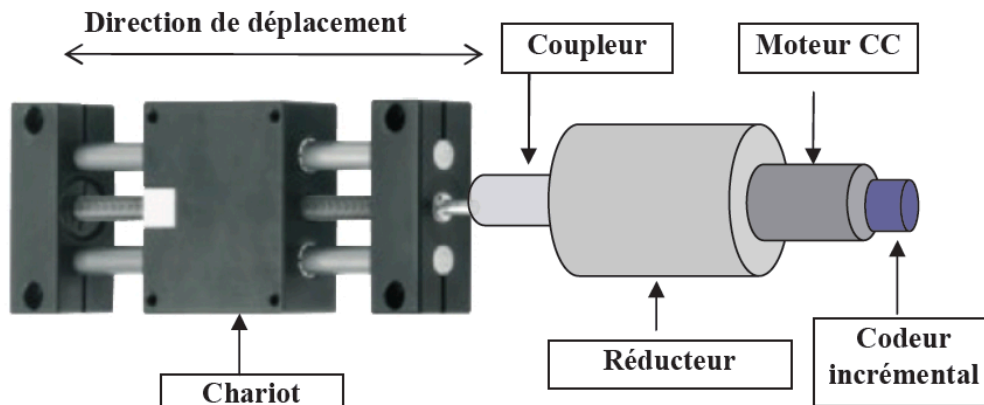
Encadrants :

Pascal Maussion

## Table des matières

<b>I. Caractéristiques du système .....</b>	<b>2</b>
<b>II. Etude par approximation d'un correcteur continu équivalent .....</b>	<b>2</b>
a. Modélisation et caractéristique .....	2
b. Modèle équivalent du système.....	3
c. Correction par calcul d'un correcteur P .....	4
i. Limite de validité du modèle.....	4
ii. Modèle simplifié.....	6
iii. Simulation et comparaison avec le modèle.....	8
iv. Synthèse des résultats.....	13
v. Effet de la période d'échantillonnage.....	14
vi. Réponse à une rampe.....	18
d. Correction par calcul d'un correcteur PI .....	19
i. Détermination des paramètres du correcteur.....	19
ii. Discrétisation du correcteur .....	20
iii. Simulation.....	21
iv. Correcteur par fonction $c2d$ .....	22
v. Variation de $T_e$ .....	23
vi. Réponse à une rampe.....	26
<b>III. Etude par approximation d'un correcteur par la transformée en z .....</b>	<b>27</b>
a. Correction par correcteur proportionnel en z .....	27
i. Etude analytique.....	27
b. Correction par correcteur PI en z .....	28
i. Etude analytique.....	28
ii. Simulation.....	29
iii. Réponse à une perturbation .....	31

## I. Caractéristiques du système



Les principales caractéristiques du système nous permettant d'établir un modèle équivalent sont les suivantes :

- boucle de vitesse avec charge ramenée sur l'arbre moteur + boucle de courant réalisées grâce à un variateur de vitesse, approximées par un premier ordre de constante de temps  $\tau_1 = 0,1s$  et un gain  $G$  tel que le moteur atteigne sa vitesse nominale 3000 tr/mn pour  $V_{com} = 10V$ ,
- réducteur  $R=5$  supposé parfait, vis sans fin de pas 5 mm, supposée parfaite, sans élasticité ni jeu,
- codeur incrémental associé à un circuit de comptage lu par l'automate à la période  $T_e$ , on supposera que le gain équivalent de ce capteur de vitesse (placé côté moteur) est constant et de 2pts/tr/s,
- commande par automate programmable avec un période d'échantillonnage  $T_e$  réglable,
- la consigne est transmise à l'automate programmable sous la forme numérique  $N_{ref}$ .

## II. Etude par approximation d'un correcteur continu équivalent

### a. Modélisation et caractéristique

Pour commencer, il nous faut fixer les différentes constantes de temps de la simulation pour valider les hypothèses que nous ferons par la suite de cette étude.

On doit choisir la période d'échantillonnage de notre convertisseur numérique analogique pour que celle-ci n'entraîne pas une instabilité de notre système. Pour cela, elle doit être suffisamment petite pour répondre par exemple au critère de Shannon. Vu que nous sommes en simulation, nous ne nous contraignons pas trop quand à la valeur ce temps. Il faut juste faire attention à dimensionner cette valeur par rapport à la boucle fermée et non pas à la boucle ouverte. On rappelle que la boucle fermée peut entraîner une accélération de la constante de temps du système de l'ordre de 10. On obtient alors la condition :

$$T_e \ll 10 \cdot \tau_1$$

Il ne faut pas oublier que nous utilisons un logiciel de simulation qui utilise des méthodes numériques. Il dispose donc lui aussi d'une période d'échantillonnage. Par défaut, cette valeur est fixée directement par Matlab. Pour éviter toute erreur nous choisissons de lui imposer cette valeur de façon à respecter la condition suivante :

$$T_{matlab} \ll T_e$$

Les autres valeurs du système sont initialisé dans un fichier de type .m sous Matlab.

### b. Modèle équivalent du système

Les valeurs que nous avons fixées nous permettent de faire le modèle continu du système échantillonné. On peut alors remplacer le block convertisseur CNA (Convertisseur Numérique Analogique) par un terme de retard d'expression :

$$ZOH \cong e^{-p\frac{T_e}{2}}$$

Avec cette version du logiciel de Matlab, nous sommes obligés d'utiliser des blocks permettant d'adapter la fréquence d'échantillonnage des parties du système sous Simulink. Pour cela on utilise les blocks « Rate Transition ». Ils font la frontière entre le système continue et échantillonné.

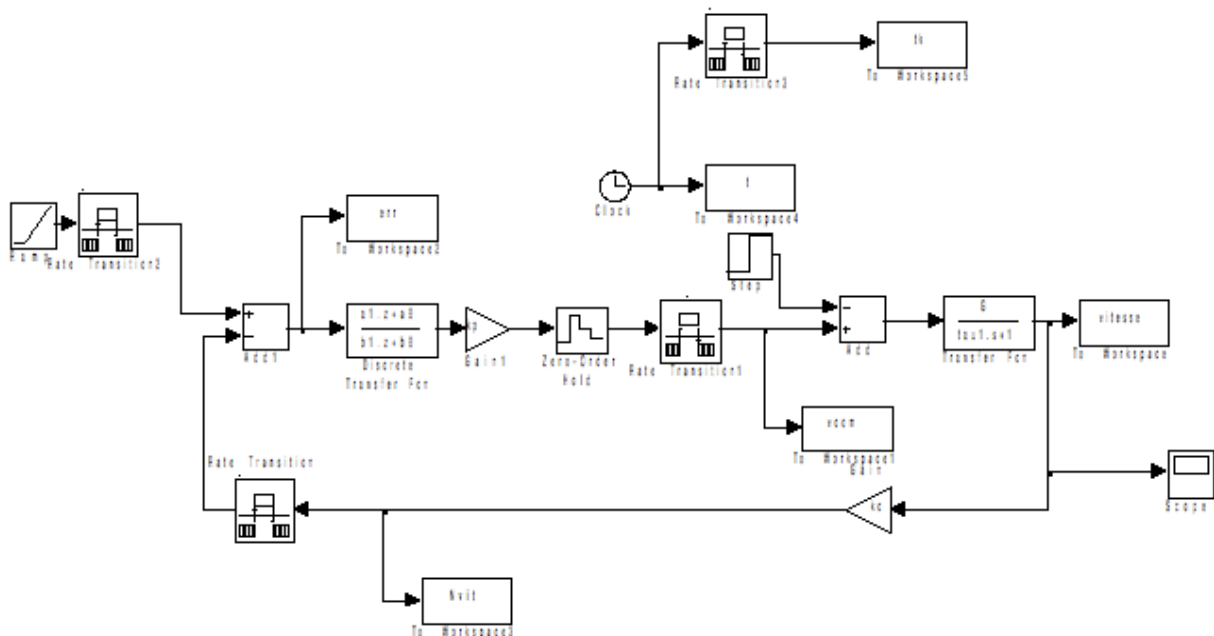


Schéma block Simulink du système

On souhaite déterminer le  $N_{ref}$  nécessaire pour obtenir une rotation de 3000tr/mn. Pour cela, avec notre schéma block et les caractéristiques du système, on remonte jusqu'à la donnée que nous cherchons. En partant de la vitesse,

$$V_{rotation} = 3000 \text{ tr/min} = 50 \text{ tr/s}$$

On passe ensuite par la chaîne de retour au travers du codeur incrémental.

$$V_{kc} = 2 \cdot V_{rotation}$$

$$V_{kc} = 100$$

On arrive sur un sommateur. Pour obtenir la vitesse souhaitée :

$$N_{ref} - V_{kc} = 0$$

Soit :

$$N_{ref} = 100$$

On fixe aussi le gain G pour obtenir une vitesse en sortie du système de 3000 tr/min.

$$G = \frac{3000}{60 \cdot 10} = 5$$

### c. Correction par calcul d'un correcteur P

Pour le moment on implante un correcteur de type proportionnel. Nous fixons donc les coefficients de notre fonction discrète de manière à ce qu'elle n'interagisse pas ( $a_1 = b_1 = 1$  ;  $a_0 = b_0 = 0$ ).

On détermine l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$F_{BF} = \frac{F_{direct}}{1 + F_{BO}}$$

$$F_{BF} = \frac{\frac{k_p \cdot G \cdot e^{-p \frac{T_e}{2}}}{p\tau_1 + 1}}{1 + k_c \cdot \frac{k_p \cdot G \cdot e^{-p \frac{T_e}{2}}}{p\tau_1 + 1}}$$

#### i. Limite de validité du modèle.

Pour simplifier la fonction de transfert on utilise un développement limité de l'exponentiel.

On sait que,

$$e^{p\frac{T_e}{2}} = 1 + p \cdot \frac{T_e}{2} + \left(p \cdot \frac{T_e}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left(p \cdot \frac{T_e}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \dots$$

On remplace  $p$  par  $j\omega$

$$e^{p\frac{T_e}{2}} = 1 + j \cdot \omega \cdot \frac{T_e}{2} + \left(j \cdot \omega \cdot \frac{T_e}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left(j \cdot \omega \cdot \frac{T_e}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots$$

$$\Re\left(e^{p\frac{T_e}{2}}\right) = 1 - \left(\omega \cdot \frac{T_e}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \dots$$

$$\Im\left(e^{p\frac{T_e}{2}}\right) = \omega \cdot \frac{T_e}{2} - \left(\omega \cdot \frac{T_e}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots$$

On peut s'approximer à l'ordre deux à condition que la partie réel et imaginaire soit respectivement très grand par rapport au terme de degré supérieur.

On obtient la condition suivante sur la partie réelle :

$$1 \gg \left(\omega \cdot \frac{T_e}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!}$$

$$0,1 > \left(\omega \cdot \frac{T_e}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!}$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{0,2}}{T_e} > \omega$$

Soit

$$89,44 \text{ rad. s}^{-1} > \omega$$

Et pour la partie imaginaire,

$$\omega \cdot \frac{T_e}{2} \gg \left(\omega \cdot \frac{T_e}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!}$$

$$0,1 \cdot \omega \cdot \frac{T_e}{2} > \left(\omega \cdot \frac{T_e}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!}$$

$$\sqrt{3! \cdot 0,1 \cdot \left(\frac{2}{T_e}\right)^2} > \omega$$

$$154,91 \text{ rad. s}^{-1} > \omega$$

La condition sur partie réelle est donc plus contraignante que celle sur la partie imaginaire.

## ii. Modèle simplifié

On peut maintenant simplifier la fonction de transfert précédente en remplaçant l'exponentiel dans la formule précédente.

$$F_{BF} = \frac{\frac{k_p \cdot G \cdot \frac{1}{1 + p \cdot \frac{T_e}{2}}}{p\tau_1 + 1}}{1 + k_c \cdot \frac{k_p \cdot G \cdot \frac{1}{1 + p \cdot \frac{T_e}{2}}}{p\tau_1 + 1}}$$

$$F_{BF} = \frac{k_p \cdot G \cdot \frac{1}{1 + p \cdot \frac{T_e}{2}}}{p \cdot \tau_1 + 1 + k_c \cdot k_p \cdot G \cdot \frac{1}{1 + p \cdot \frac{T_e}{2}}}$$

$$F_{BF} = \frac{k_p \cdot G}{p \cdot \tau_1 + 1 + p^2 \frac{T_e \tau_1}{2} + p \frac{T_e}{2} + k_c \cdot k_p \cdot G}$$

$$F_{BF} = \frac{\frac{k_p \cdot G}{1 + k_c \cdot k_p \cdot G}}{1 + p \frac{\left(\tau_1 + \frac{T_e}{2}\right)}{1 + k_c \cdot k_p \cdot G} + p^2 \frac{T_e \tau_1}{2 \cdot (1 + k_c \cdot k_p \cdot G)}}$$

On en déduit les grandeur  $\zeta$  et  $\omega_n$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2 \cdot (1 + k_c \cdot k_p \cdot G)}{T_e \tau_1}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{T_e}{2} + \tau_1\right)}{1 + k_c k_p G} \cdot \sqrt{\frac{T_e \tau_1}{2 \cdot (1 + k_c \cdot k_p \cdot G)}}$$

Il faut aussi avoir la condition pour avoir un modèle avec une erreur inférieure à 10% su la valeur du gain.

$$\omega_n < \frac{\omega_e}{4}$$

Soit,

$$\sqrt{\frac{2 \cdot (1 + k_c \cdot k_p \cdot G)}{T_e \tau_1}} < \frac{\omega_e}{4}$$

$$\frac{2 \cdot (1 + k_c \cdot k_p \cdot G)}{T_e \tau_1} < \frac{\omega_e^2}{16}$$

$$2 \cdot (1 + k_c \cdot k_p \cdot G) < \frac{\omega_e^2}{16} \cdot T_e \tau_1$$

$$k_p < \frac{\omega_e^2}{32 \cdot k_c \cdot G} \cdot T_e \tau_1 - \frac{1}{k_c \cdot G}$$

$$k_p < 1,13$$

Cette condition est nécessaire pour toujours avoir un modèle continu avec une validité acceptable.

Pour ce modèle on peut trouver une valeur limite de gain qui déstabiliserai le système. Pour cela on choisi de regarder le critère de la marge de phase.

$$\begin{cases} |F_{BO}(\omega_{0db})| = k_p \cdot G \cdot k_c \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{0db} \cdot \tau_1)^2}} = 1 \\ M_\varphi = 180 + \arg(F_{BO}(\omega_{0db})) = 0 \end{cases}$$

$$\arg(F_{BO}(\omega_{0db})) = 180 - 90 - \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\omega_{0db}}{2} \cdot T_e = 0$$

$$\omega_{0db} = 90 - 180 - \frac{2\pi}{180 \cdot T_e}$$

$$\omega_{0db} = 314,2 \text{ rad. s}^{-1}$$

Le système est alors en limite de stabilité pour la pulsation précédente. On peut en déduire la valeur de  $k_p$  correspondante.

$$k_p = \frac{\sqrt{1 + (\omega_{0db} \cdot \tau_1)^2}}{G \cdot k_c}$$

$$k_p = 3,14$$

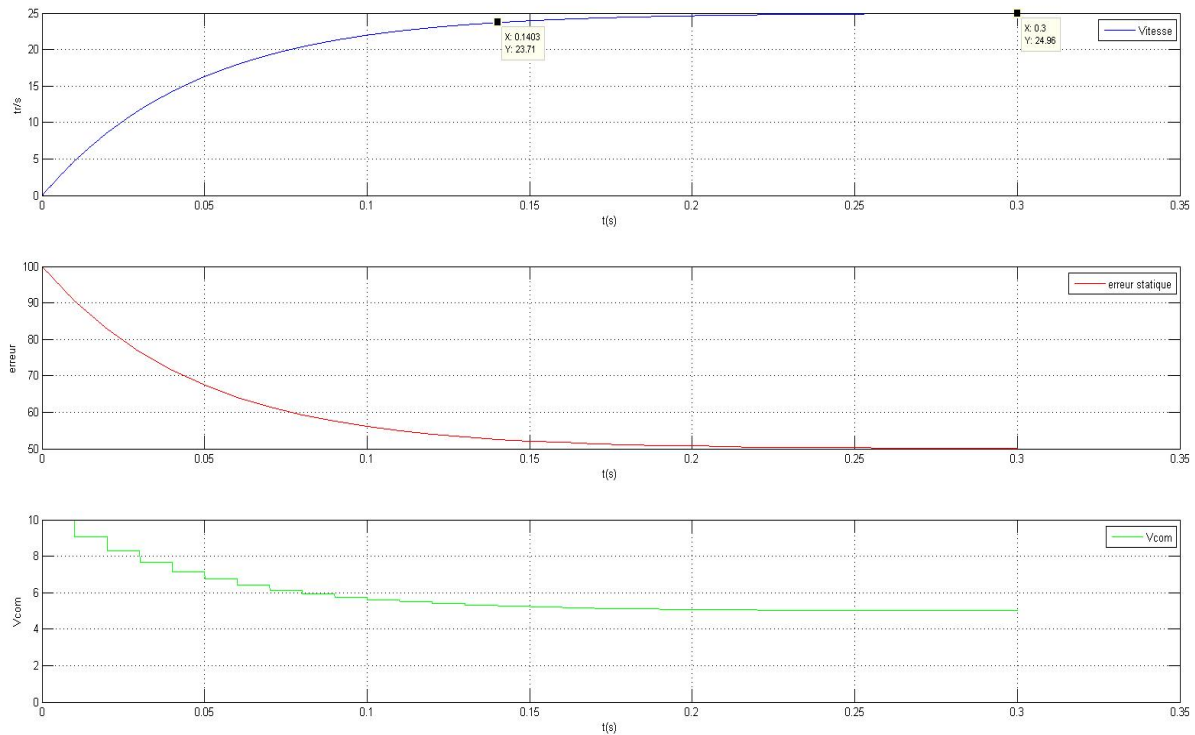
Nous trouvons la valeur théorique de gain pour laquelle notre système devrait passer instable.



### iii. Simulation et comparaison avec le modèle

#### Simulation pour $K_p=0,1$

On effectue une simulation pour une valeur de gain de correcteur valant 0,1. On obtient une réponse de type premier ordre.



#### Simulation $K_p=0,1$

On vérifie les valeurs trouvées avec notre modèle équivalent, pour cette valeur de gain. On a donc :

$$\zeta = 1,66$$

$$\omega_n = 63,25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

On lit sur l'abaque le temps de réponse à 5%.

$$T_{5\%} = \frac{9}{63,25} = 142,3 \text{ ms}$$

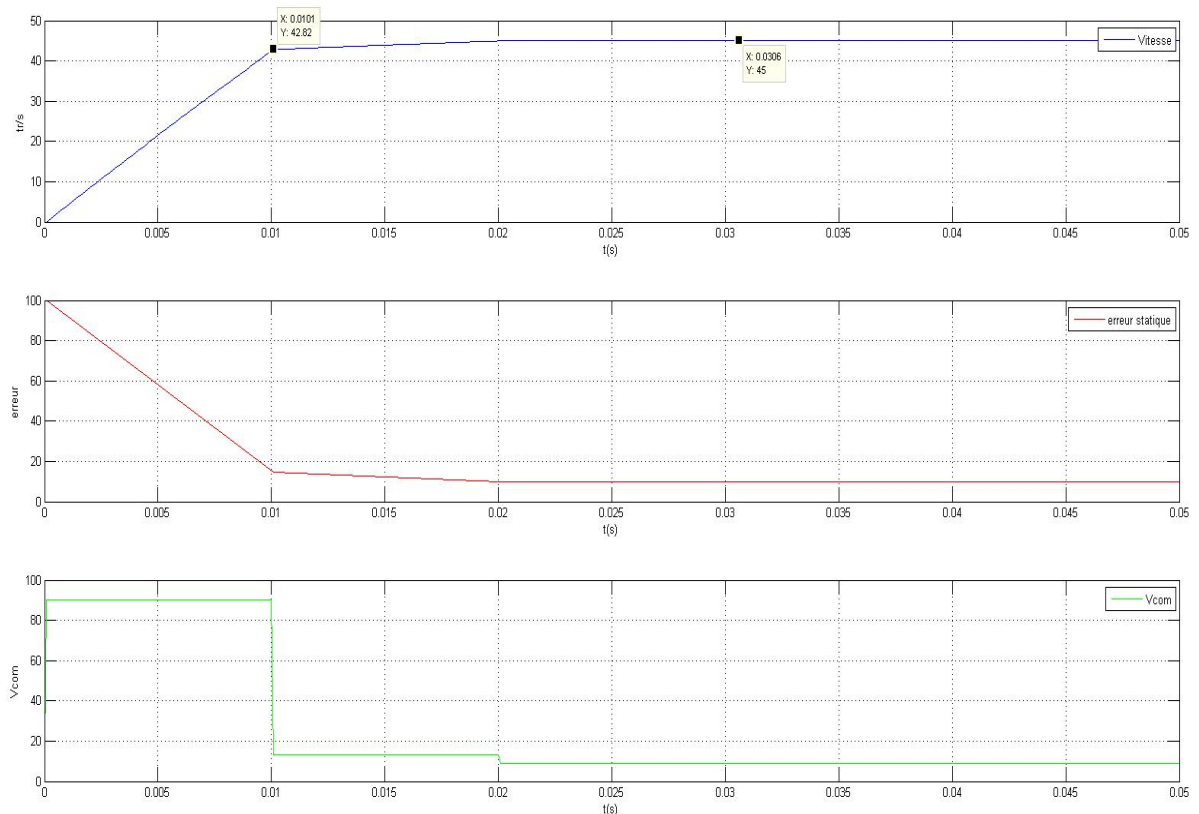
Avec le théorème de la valeur final.

$$V_f = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot 100 \cdot \frac{1}{p} \cdot F_{BF}(p) = 25 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-1}$$

Au vue de la valeur de la pulsation naturel. On peut déjà dire que pour cette valeur de gain, les valeurs trouvées devraient correspondre à notre modèle équivalent.

### Simulation pour $K_p=0,9$

On simule à présent pour un gain de 0,9. On obtient la réponse suivante. Ce système est le plus rapide et sans dépassement, ce qui correspond à une réponse pile.



### Simulation pour $K_p=0,9$

On vérifie les valeurs trouvées avec notre modèle équivalent. Pour cette valeur de gain on a donc :

$$\zeta = 0,74$$

$$\omega_n = 141,42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$D_{\%} = 3,15\%$$

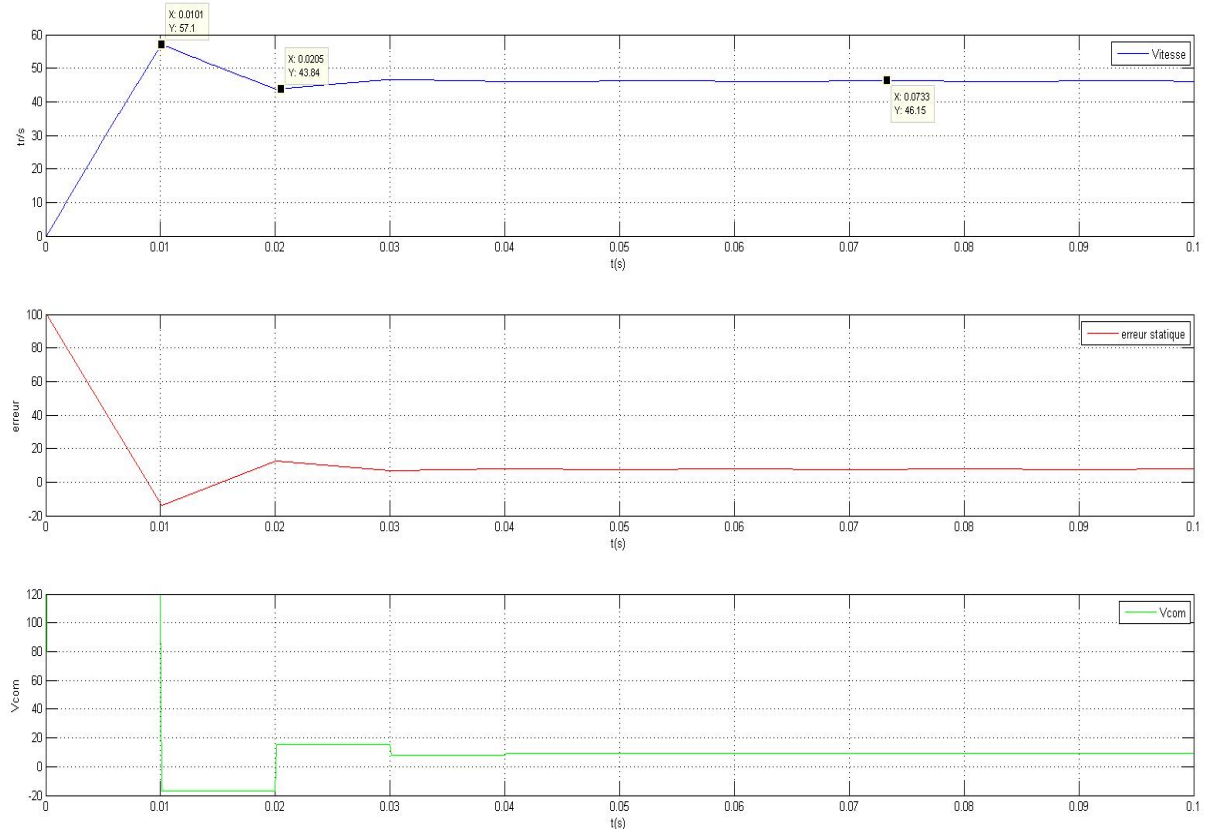
$$V_f = 45 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-1}$$

On lit sur l'abaque le temps de réponse à 5%.

$$T_{5\%} = \frac{3}{141,42} = 21,2 \text{ ms}$$

### Simulation pour Kp=1,2

Pour cette valeur de gain on obtient notre premier dépassement.



### Simulation pour Kp=1,2

Nous dépassons la valeur maximale pour laquelle notre modèle a été conçu. Nous devrions trouver des résultats qui s'éloignent du modèle théorique. C'est écart est dû au non respect de la condition qui nous a permis d'effectuer le développement limité.

$$\zeta = 0,65$$

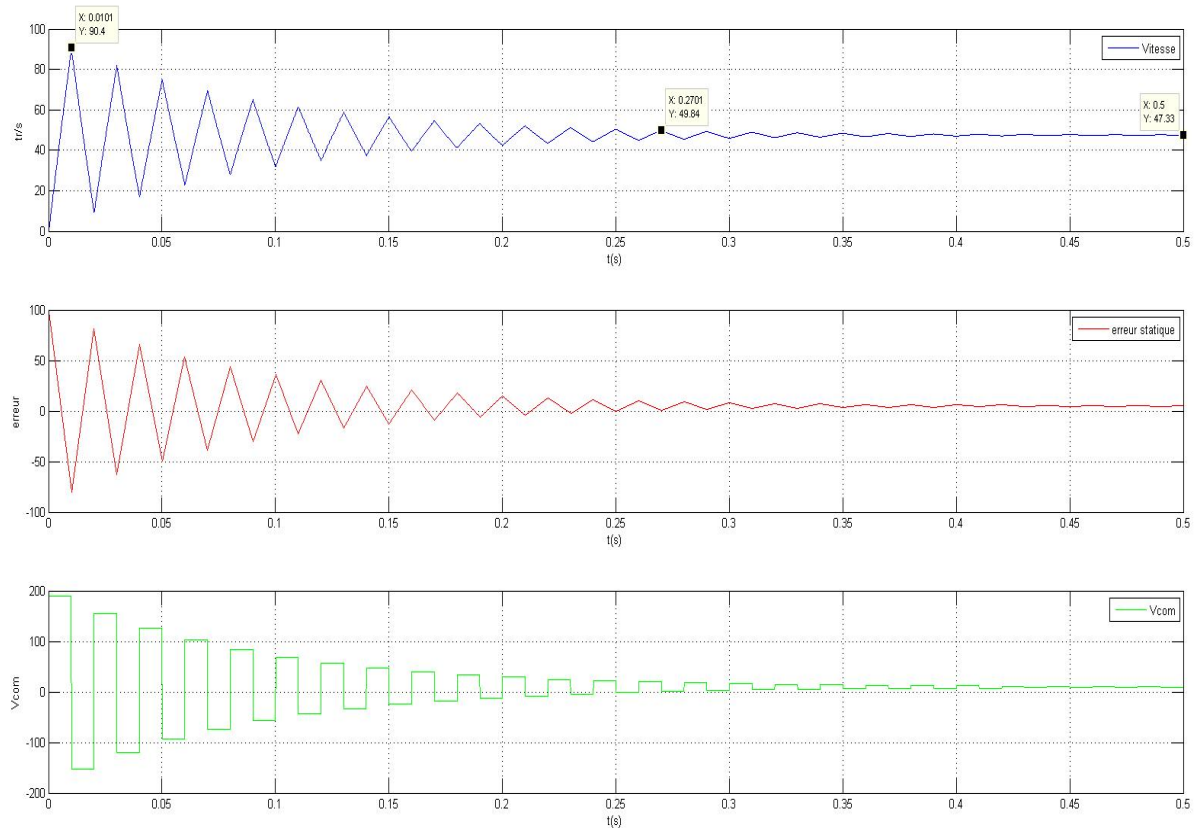
$$\omega_n = 161,24 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$D_{\%} = 6,8\%$$

$$V_f = 46 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T_{5\%} = \frac{5,2}{161,24} = 32,2 \text{ ms}$$

### Simulation pour $K_p=1,9$



### Simulation pour $K_p=1,9$

Ici on trouve une réponse qui commence à avoir quelques oscillations.

$$\zeta = 0,525$$

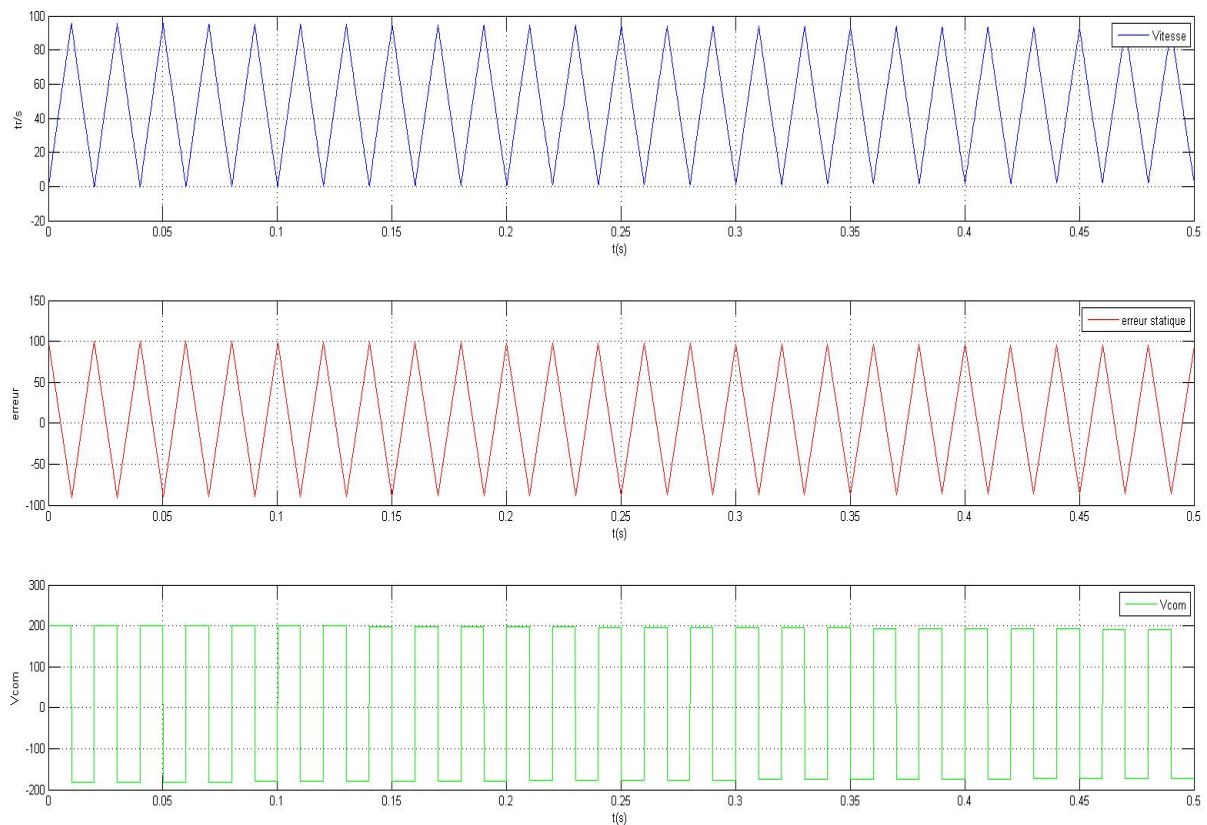
$$\omega_n = 200 \text{ rad. s}^{-1}$$

$$D_{\%} = 14,4\%$$

$$T_{5\%} = \frac{5,2}{200} = 26 \text{ ms}$$

$$V_f = 47,5 \text{ tr. s}^{-1}$$

### Simulation pour $K_p=2,01$

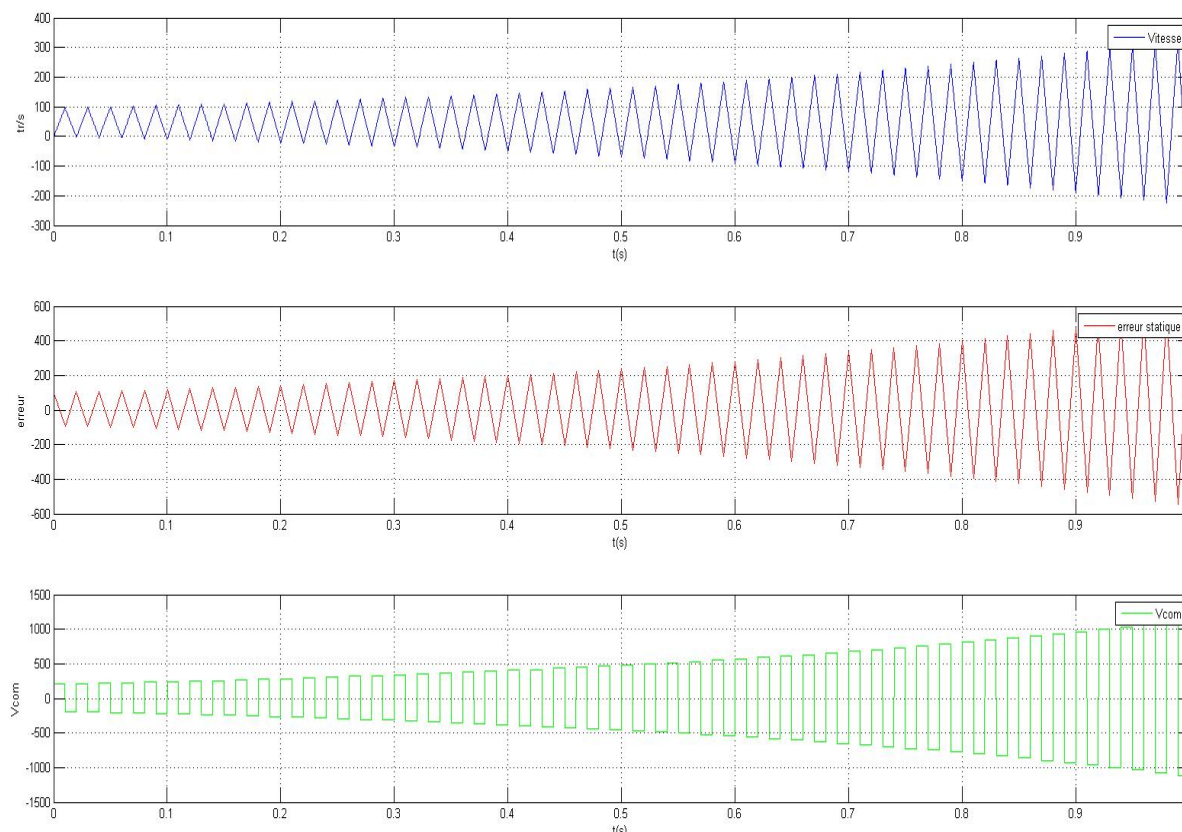


### Simulation pour $K_p=2,01$

Pour cette valeur de gain notre système est proche de la limite de stabilité. Cette valeur est du même ordre de grandeur que celle trouvée de façon analytique. L'erreur est causée par le fait que notre modèle n'est plus totalement valide pour cette pulsation.

### Simulation pour $K_p=2,03$

Pour vérifier que cette valeur est à la limite de validité, nous simulons pour un gain légèrement supérieur au précédent.



Simulation pour  $K_p=2,03$

La réponse du système tend à augmenter vers l'infinie. Cette réponse est caractéristique des systèmes instables.

#### iv. Synthèse des résultats

$K_p$	Tr 5% th	Tr 5% sim	D% th	D% simu	Vf th	Vf simu
0,1	143,3	140	0	0	25	24,96
0,9	21,2	10	3,15	0	45	45
1,2	32,2	20	6,8	23	46	46,15
1,9	14,4	270	26	90	47,5	47,33

On voit que plus on s'éloigne de la condition de notre modèle théorique, plus l'erreur entre les résultats augmente. Les valeurs trouvées restent toute fois du même ordre de grandeur et permettent d'avoir une idée rapide du comportement du système sans avoir à passer par une transformation en  $z$ .

## v. Effet de la période d'échantillonnage

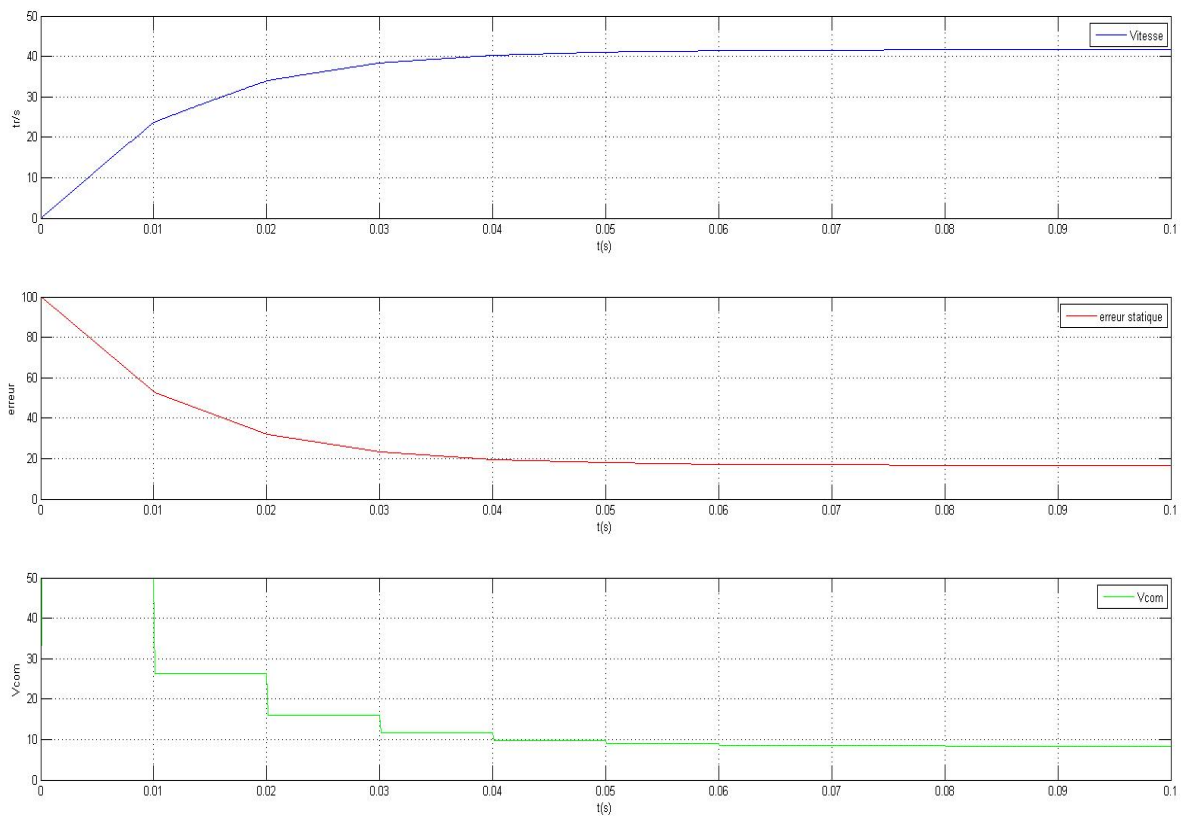
On veut observer l'impact de la période d'échantillonnage sur la réponse du système. Pour cela on fixe la valeur du gain du correcteur à,

$$\frac{K_{pmax}}{4} = 0,5$$

On fera varier la valeur de la période d'échantillonnage pour observer son effet.

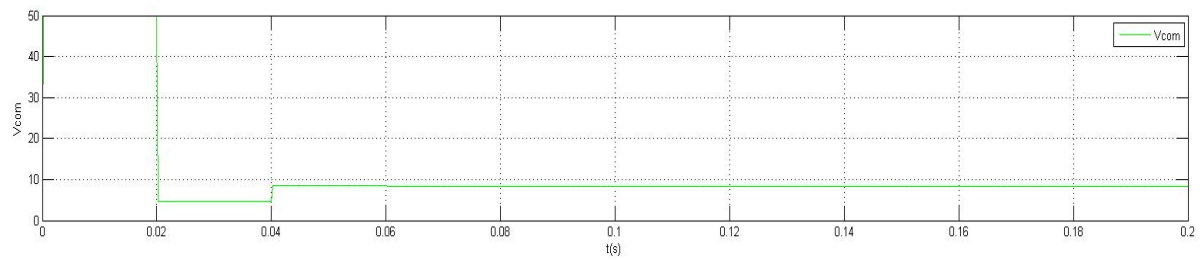
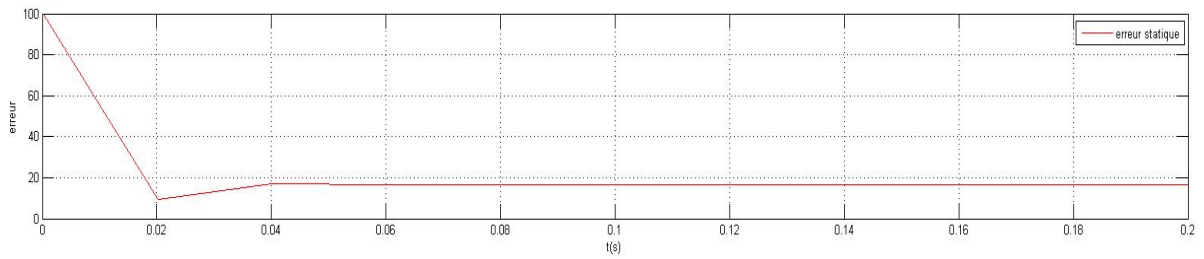
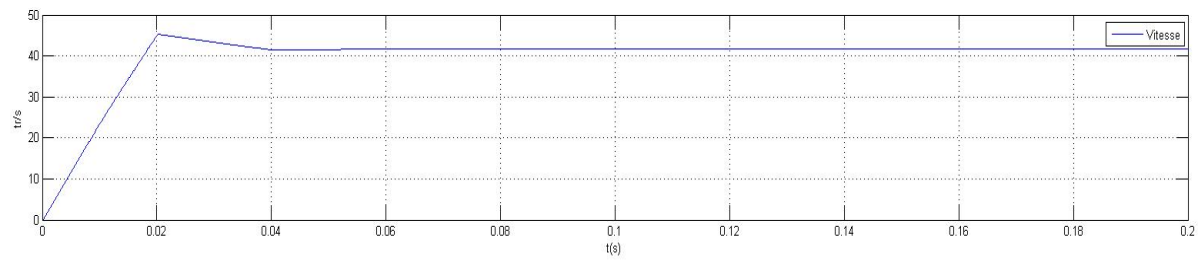
### Simulation pour $T_e=10\text{ ms}$

On refait une simulation avec une période d'échantillonnage identique et la valeur du gain précédent.



Simulation pour  $T_e=10\text{ms}$  et  $K_p=0,5$

### Simulation pour $T_e=20\text{ ms}$

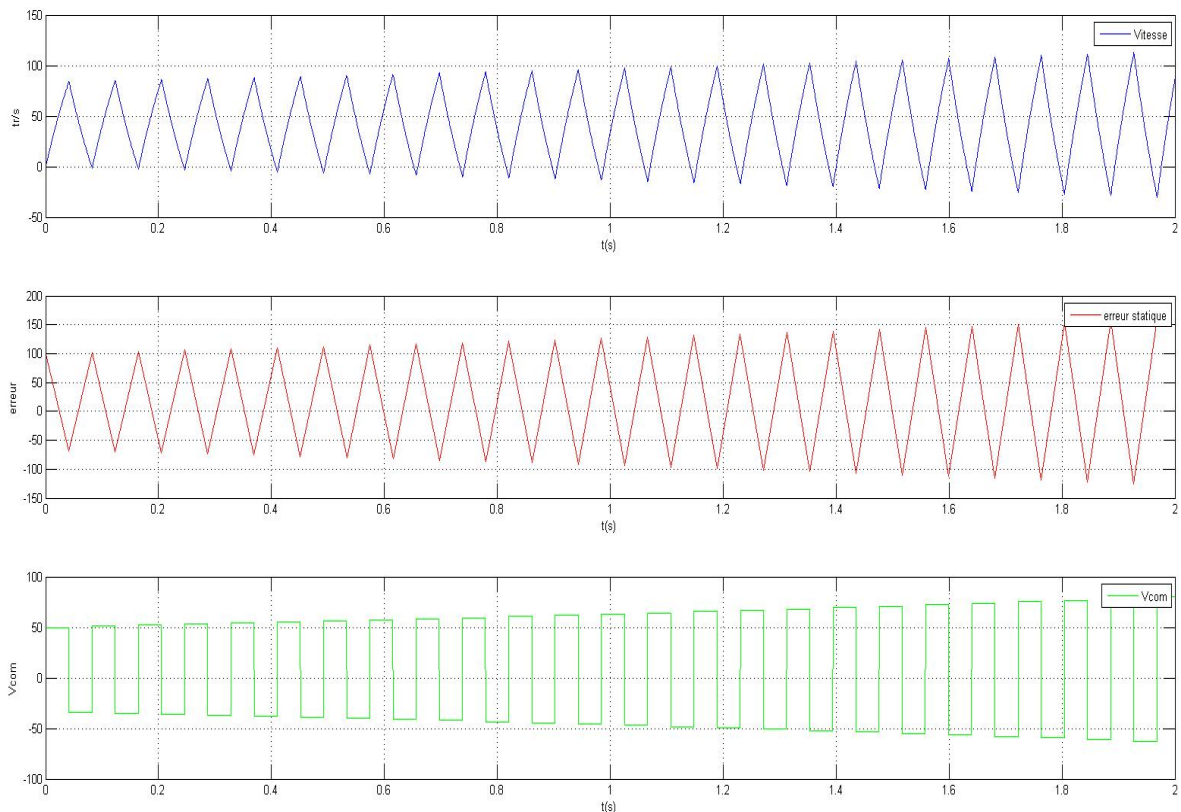


### Simulation pour $T_e=20\text{ms}$ et $K_p=0,5$

On obtient une réponse avec un léger dépassement. On peut en déduire qu'en augmentant le temps d'échantillonnage on a rendu le système moins robuste en diminuant sa marge de phase.



### Simulation pour $T_e=41\text{ ms}$



### Simulation pour $T_e=41\text{ms}$ et $K_p=0,5$

Notre hypothèse précédente est confirmée, on obtient un système instable, l'augmentation de la période d'échantillonnage l'a donc déstabilisé. On peut vérifier l'ordre de grandeur de cette valeur avec la marge de phase. Nous faisons la même démarche que pour le correcteur proportionnel.

$$\begin{cases} |F_{BO}(\omega_{0db})| = k_p \cdot G \cdot k_c \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{0db} \cdot \tau_1)^2}} = 1 \\ M_\varphi = 180 + \arg(F_{BO}(\omega_{0db})) = 0 \end{cases}$$

$$\omega_{0db} = \frac{\sqrt{(Gk_pk_c)^2 - 1}}{\tau_1}$$

$$\omega_{0db} = 48,99 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

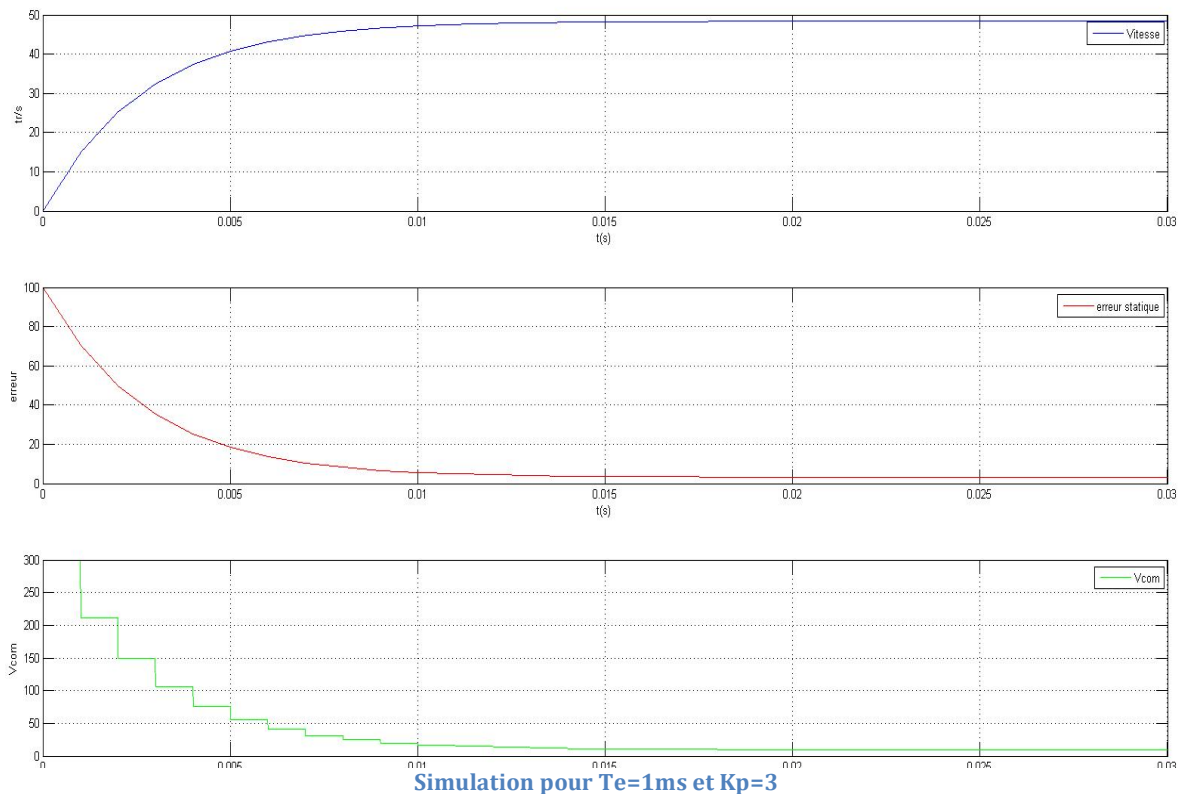
$$T_e = -\frac{2\pi}{180 \cdot (\omega_{0db} - 90 + 180)}$$

$$T_e = 20 \text{ ms}$$

On retrouve approximativement la valeur trouvée en simulation. L'écart est toujours causé par le modèle équivalent..

### Simulation pour $T_e=1\text{ ms}$ et $K_p=3$

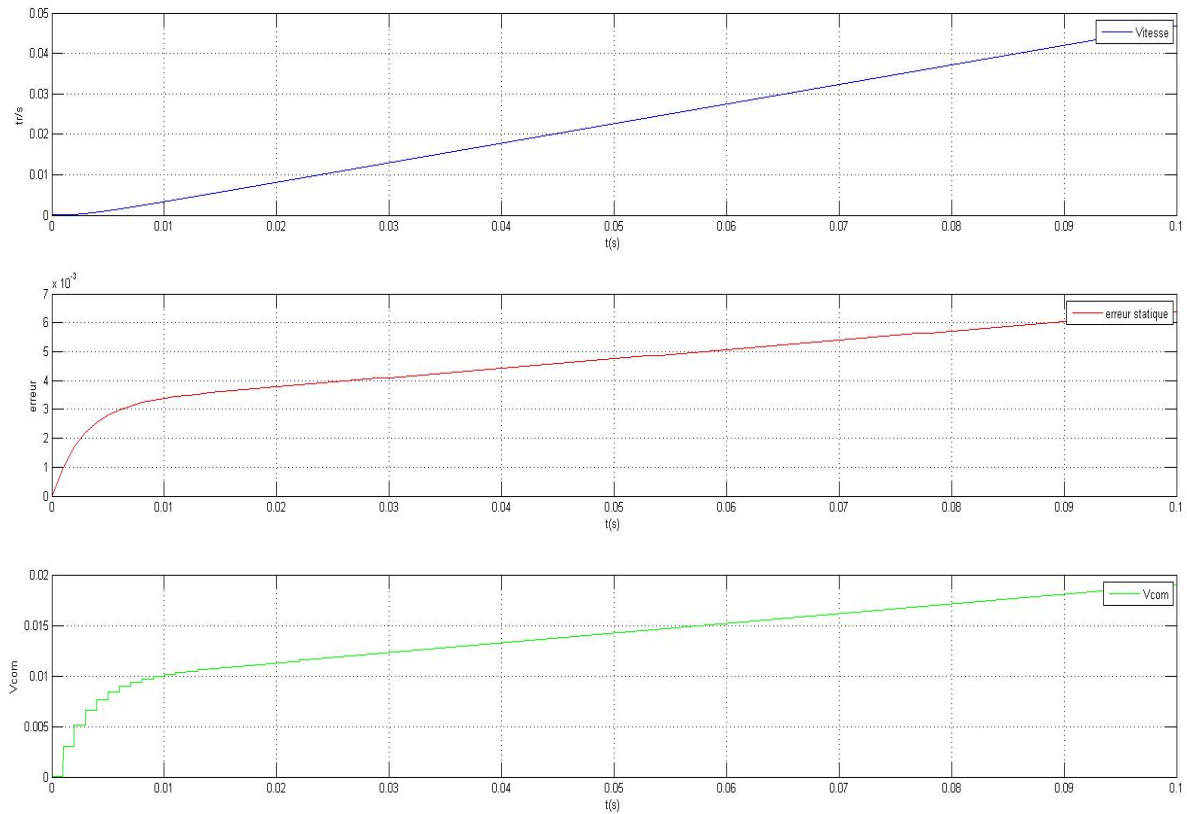
On a vu précédemment que plus on augmente le temps d'échantillonnage, plus on déstabilise le système. On vérifie à présent que l'effet inverse fonctionne. Pour cela, on simule le système avec un gain qui le rendait instable pour une période d'échantillonnage de 10 ms. On effectue la simulation avec un échantillonnage 10 fois plus rapide.



Le système reste stable malgré la valeur élevée de gain. Ainsi, plus nous pourrions diminuer le temps d'échantillonnage, plus nous pourrions insérer un correcteur proportionnel avec une valeur forte.

## vi. Réponse à une rampe

On simule la réponse du système à une rampe. Pour cela on remet les paramètres initiaux dans la simulation. Soit un gain de 0,5 et un période d'échantillonnage de 10 ms.



Simulation en réponse à une rampe

L'erreur statique tend vers l'infinie. N'ayant pas d'intégrateur dans la chaîne directe, nous aurions pu prévoir cette réponse. L'analogie avec un système continu est possible.

#### d. Correction par calcul d'un correcteur PI

##### i. Détermination des paramètres du correcteur

On souhaite maintenant intégrer un régulateur de type PI. Pour cela on néglige l'effet de l'échantillonnage blocage car cela compliquerait trop les calculs. Toujours dans un souci de simplicité on applique la méthode de compensation de pôles pour déterminer le régulateur. Bien qu'elle soit facile à appliquer elle a pour inconvénient d'être sensible à la variation paramétrique du système.

Le correcteur est de la forme :

$$C_p = \frac{k_i \cdot (1 + p\tau_i)}{p\tau_i}$$

Pour compenser le pôle en boucle ouverte on fixe  $\tau_i = \tau_1$

On obtient ainsi une  $F_{directe}$  de la forme :

$$F_{BO} = \frac{k_i \cdot G}{p\tau_i}$$

On en déduit la fonction de transfert en boucle fermée :

$$F_{BF} = \frac{F_{directe}}{1 + k_c F_{directe}}$$

$$F_{BF} = \frac{\frac{k_i \cdot G}{p\tau_i}}{1 + k_c \frac{k_i \cdot G}{p\tau_i}}$$

$$F_{BF} = \frac{\frac{k_i \cdot G}{\tau_i}}{k_c \frac{k_i \cdot G}{\tau_i} + 1}$$

$$F_{BO} = \frac{\frac{1}{k_c}}{\frac{\tau_i p}{k_c k_i G} + 1}$$

Le système résultant est du premier ordre.

Nous voulons que la constante de temps du système en boucle fermée soit respectivement 2, 5 et 10 fois plus rapide que la boucle ouverte. Pour cela nous jouerons sur le paramètre  $k_i$ .

## ii. Discrétisation du correcteur

Pour implanter le correcteur dans la simulation il faut maintenant le discrétiser. Nous choisissons d'utiliser la méthode des trapèzes pour cela. On rappelle que avec cette méthode on a :

$$p \cong \frac{2}{T_e} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Notre correcteur devient alors de la forme suivante.

$$c(z) = \frac{k_i \cdot \left(1 + \frac{2}{T_e} \cdot \frac{z-1}{z+1} \cdot \tau_i\right)}{\frac{2}{T_e} \cdot \frac{z-1}{z+1} \cdot \tau_i}$$

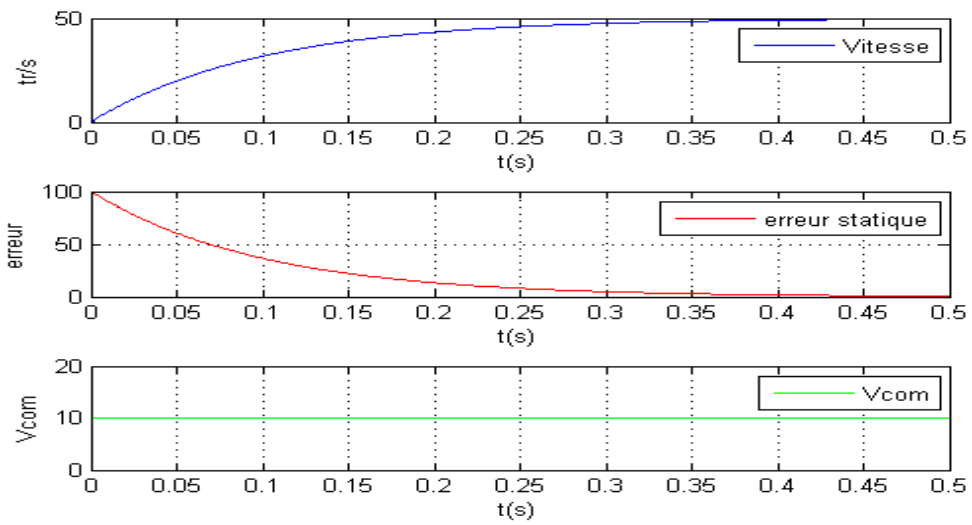
$$c(z) = k_i \cdot \frac{(T_e \cdot z + T_e + (2z - 2) \cdot \tau_i)}{2\tau_i z - 2\tau_i}$$

$$c(z) = k_i \cdot \frac{z \cdot (T_e + 2\tau_i) + T_e - 2\tau_i}{2\tau_i z - 2\tau_i}$$

On peut en déduire les coefficients à insérer dans notre simulation.

$$\begin{aligned} a_1 &= k_i \cdot (T_e + 2\tau_i) \\ a_0 &= k_i \cdot (T_e - 2\tau_i) \\ b_1 &= 2\tau_i \\ b_0 &= -2\tau_i \end{aligned}$$

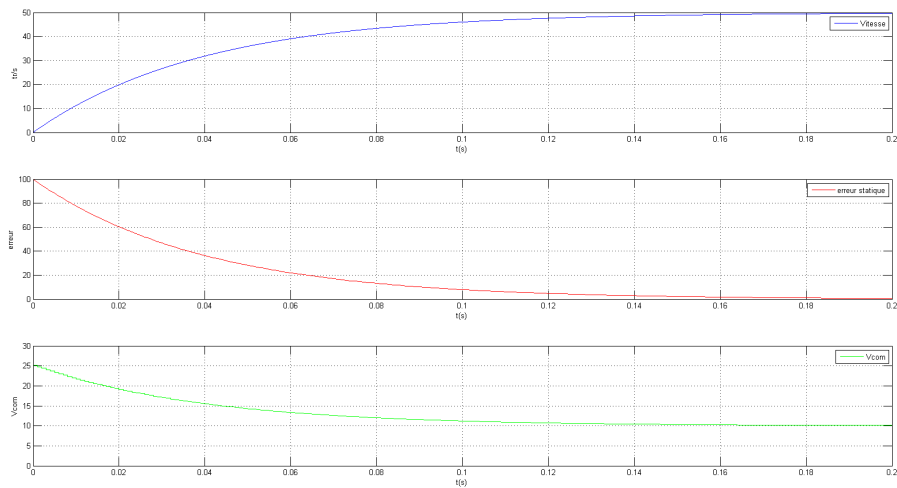
### iii. Simulation



#### Système 2 fois plus rapide

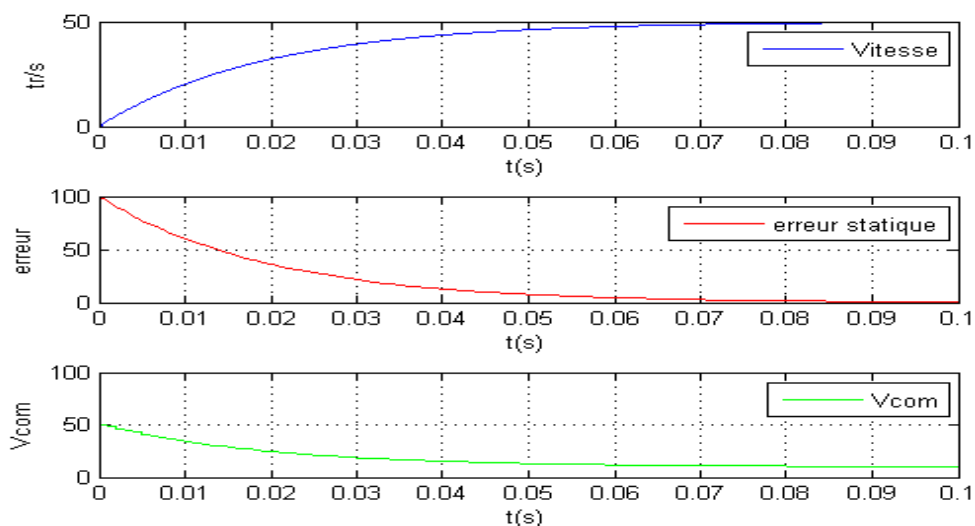
*Simulation pour un système 2 fois plus rapide*

*Simulation pour un système 5 fois plus rapide*



#### Système 5 fois plus rapide

### Simulation pour un système 10 fois plus rapide



Système 10 fois plus rapide

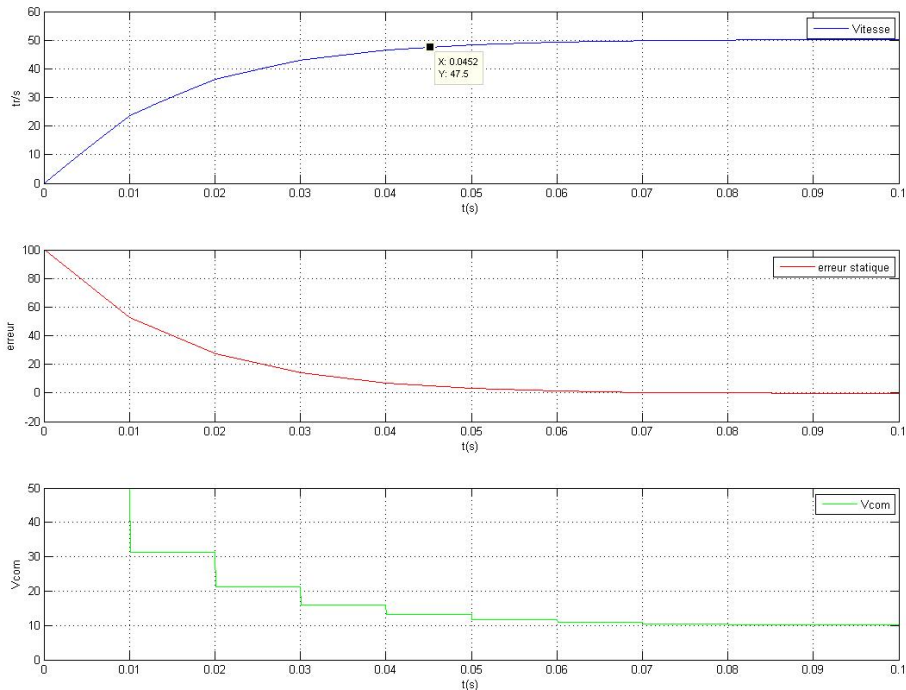
Pour les trois constantes de temps, le système répond bien comme un premier ordre. Par contre, les constantes de temps sont supérieures à ce que nous attendions. Cela est due au approximation que nous avons fait pour simplifier les calculs et à la méthode de discrétisation peu précise que nous avons choisit.

#### iv. Correcteur par fonction c2d

Il est aussi possible d'utiliser la fonction « c2d » de Matlab pour obtenir les coefficients à implanter dans le correcteur. L'avantage de c'est fonction est qu'elle permet d'approximer le correcteur en  $z$  par des méthodes de calcul plus performantes que celle que nous avons utilisé précédemment. Nous calculons les coefficients du correcteur avec deux méthodes différentes pour une constante de temps en boucle fermée 5 fois plus rapide.

	<b>a0</b>	<b>a1</b>	<b>b0</b>	<b>b1</b>
<b>Trapèze</b>	-0.0995	0.1005	-0.2	0.2
<b>Zoh</b>	-0.495	0.5	-1	1
<b>Tustin</b>	-0.4975	0.5025	-1	1

Aux vues des faibles différences entre les coefficients des deux méthodes de la fonction de calcul, nous ne simulons que les coefficients obtenus avec « ZOH ».



### Système en ZOH

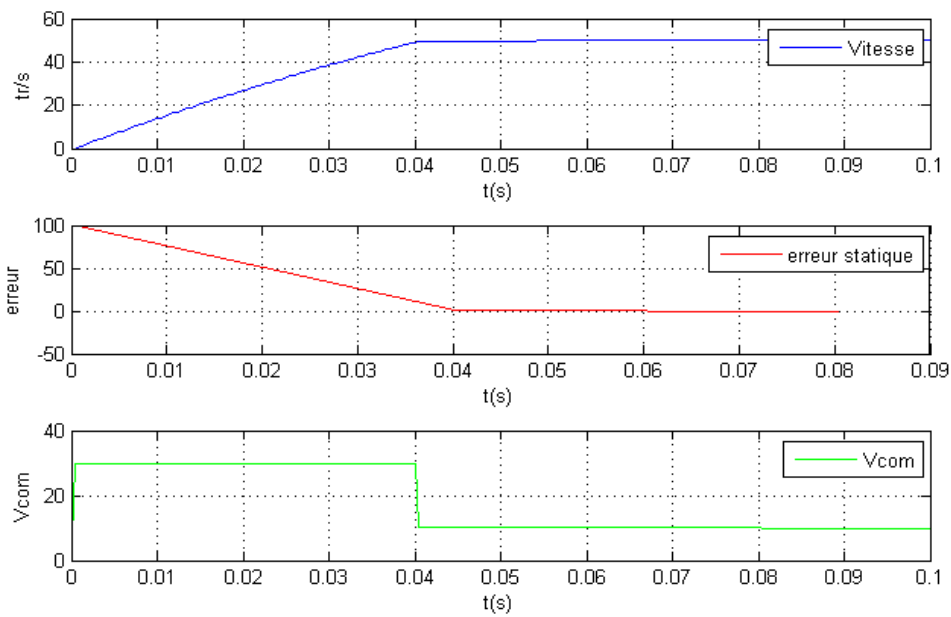
Le système est plus proche de la réponse que nous attendions, on observe cela notamment avec le temps de réponse d'environ 20 ms contrairement à la simulation ou nous avons inséré les coefficients obtenus avec la méthode des trapèzes. Cela paraît normal car Matlab utilise des méthodes de calcul plus complexe que celle que nous avons utilisée.

#### v. Variation de $T_e$

On modifie à présent la valeur de l'échantillonnage pour observer son effet sur la réponse du système. On conserve une constante de temps en boucle fermée 5 fois plus rapide.



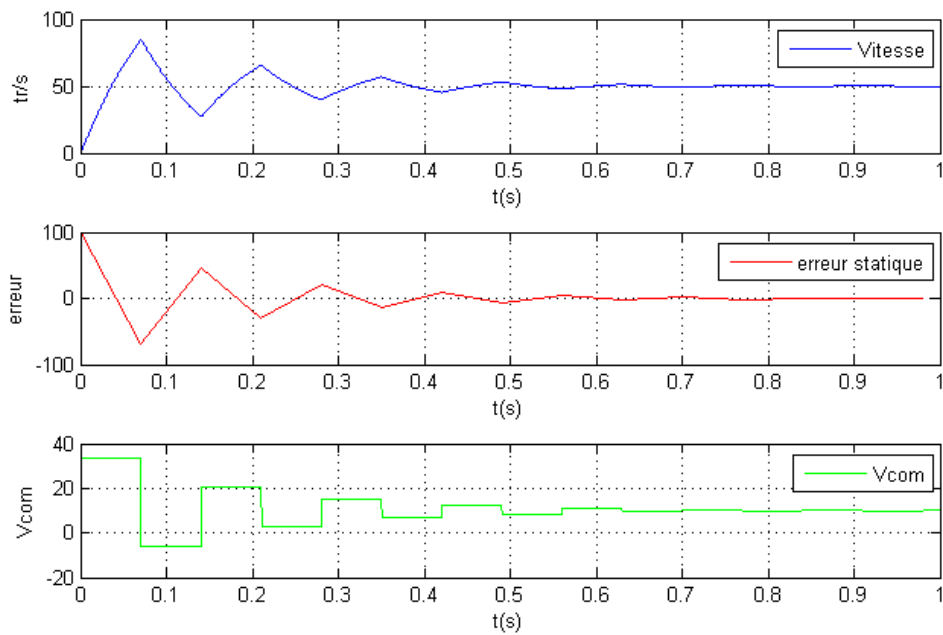
### Simulation pour $T_e=40\text{ ms}$



Simulation pour  $T_e=40\text{ms}$

Pour cette valeur d'échantillonnage on arrive à la valeur final en un seul échantillon, on obtient donc une réponse pile. Cette réponse correspond à un pôle en 0 en boucle fermée.

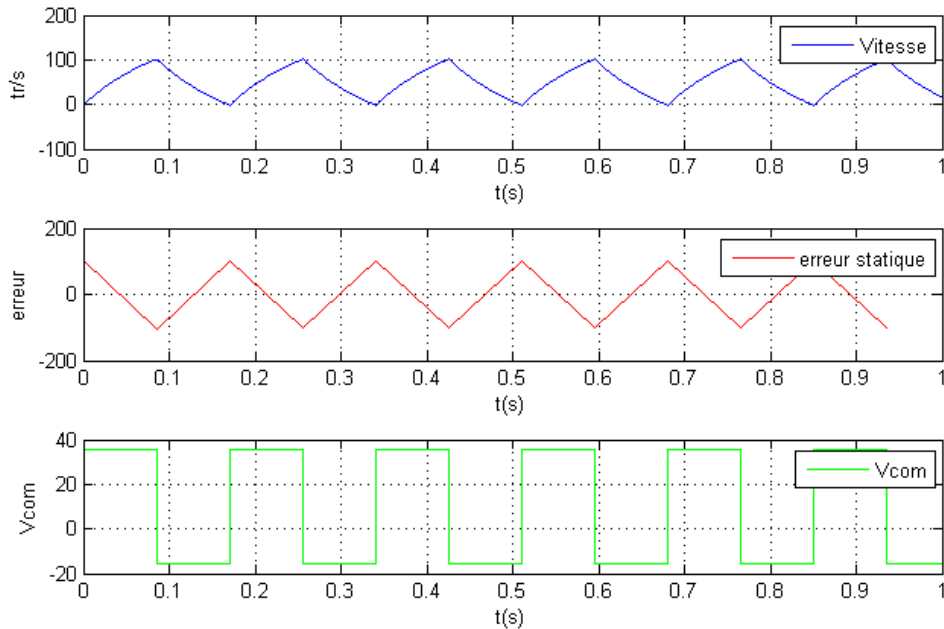
### Simulation pour $T_e=70\text{ ms}$



Simulation pour  $T_e=70\text{ ms}$

La réponse est de type second ordre sous-amorti. Le placement des pôles équivalent en z correspondrait à une paire de pôles complexes avec un module inférieur à 1.

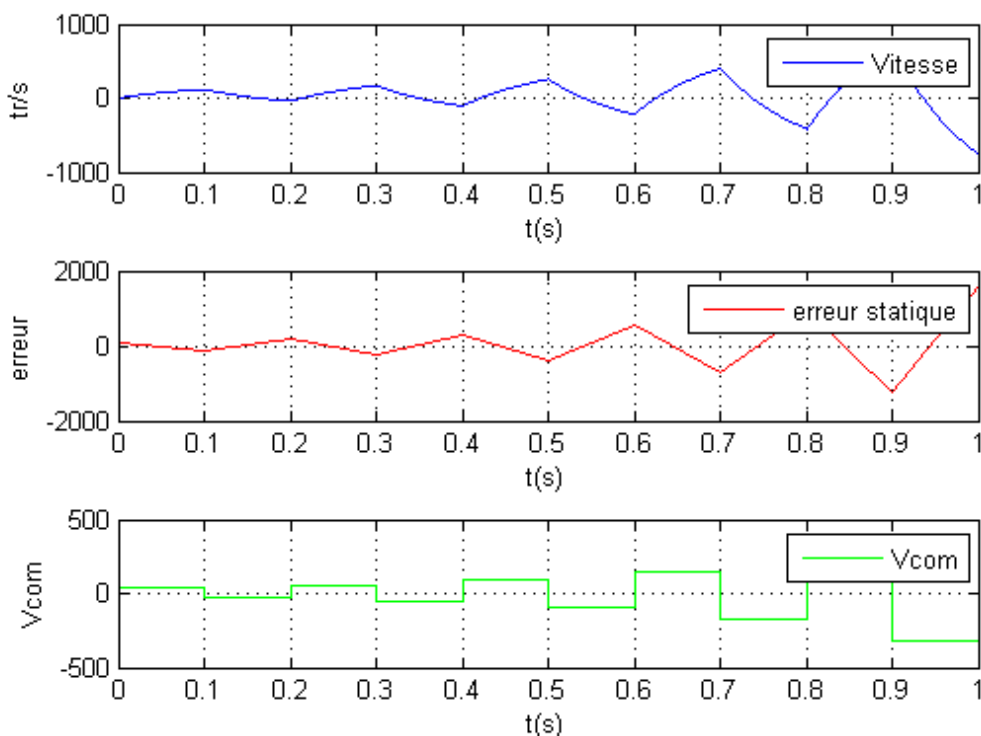
*Simulation pour  $T_e=85\text{ ms}$*



**Simulation pour  $T_e=85\text{ ms}$**

Ici nous obtenons une réponse à la limite de stabilité. Cela signifie que la boucle fermée comporte un pôle en -1.

*Simulation pour  $T_e=100\text{ ms}$*

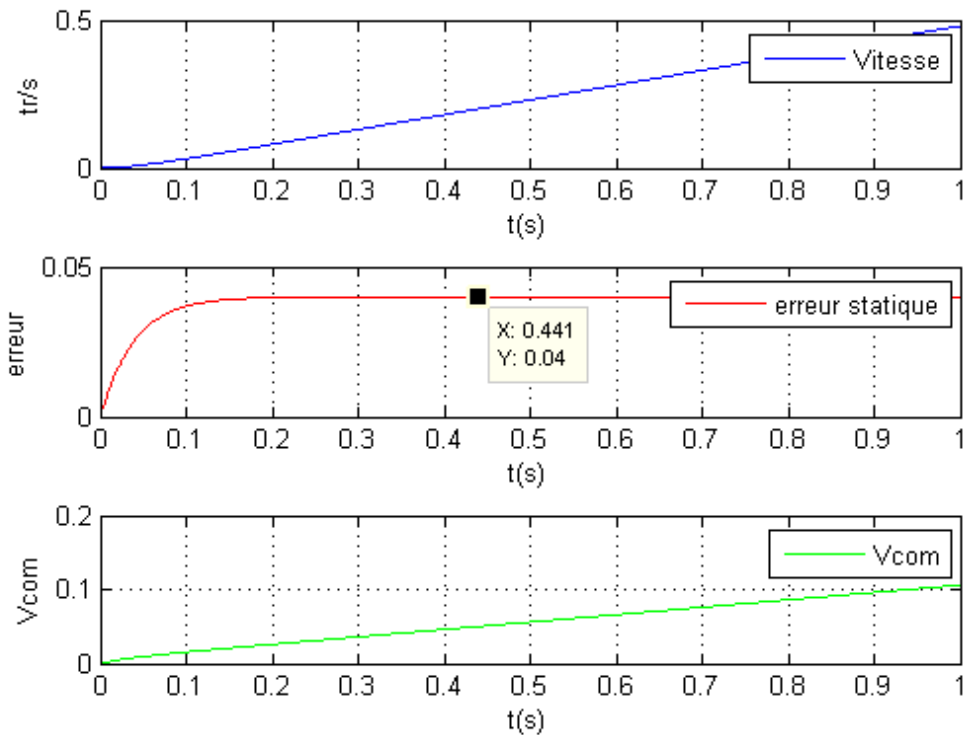


**Simulation pour  $T_e=100\text{ ms}$**

Pour finir, quand la période d'échantillonnage devient trop grande, nous déstabilisons le système. En z cela revient à rendre supérieur à 1 le module du pôle en boucle fermée.

#### vi. Réponse à une rampe

On s'intéresse ici à la réaction du système pour une rampe en entrée pour un système 5 fois plus rapide.



#### Réponse à une rampe avec correcteur PI

Ayant un intégrateur dans la chaîne direct. Il est normal d'obtenir une erreur d'accélération constante.

### III. Etude par approximation d'un correcteur par la transformée en z

#### a. Correction par correcteur proportionnel en z

##### i. Etude analytique

$$T_{BO}(z) = G \cdot K_p \cdot K_c \cdot \frac{1 - \alpha}{z - \alpha}$$

Avec

$$\alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau_1}}$$

On peut ainsi exprimer la boucle fermée de la manière suivante.

$$T_{BF}(z) = \frac{G \cdot K_p \cdot (1 - \alpha)}{z - \alpha + G \cdot K_p \cdot K_c \cdot (1 - \alpha)}$$

On note

$$\beta = \alpha + G \cdot K_p \cdot K_c \cdot (1 - \alpha)$$

On sait que notre système sera stable pour  $\beta \in ] - 1; 1[$

On en déduit les critères sur le correcteur proportionnel pour assuré la stabilité de la boucle fermée.

$$K_p < \frac{1}{G \cdot K_c} \cdot \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)$$

$$T_e < \tau_1 \cdot \ln \left( \frac{K_p \cdot G \cdot K_c + 1}{K_p \cdot G \cdot K_c - 1} \right)$$

Soit pour une période d'échantillonnage de 10 ms,

$$K_p < 2$$

Et pour une valeur de gain 4 fois inférieure à  $K_{pmax}$ ,

$$T_e < 40,5 \text{ ms}$$

On retrouve exactement les valeurs obtenues en simulation au début de notre étude. (Voir figure 4 et 8). Ce modèle correspond à la réalité du système.

## b. Correction par correcteur PI en z

### i. Etude analytique

On suit la même démarche que précédemment pour calculer les paramètres d'un correcteur PI en z.

L'expression du correcteur est la suivante,

$$C(z) = \frac{k \cdot (z - A)}{z - 1}$$

Pour simplifier la fonction de transfert, on choisit de fixer  $A = \alpha$ .

$$T_{BF}(z) = \frac{K \cdot G \cdot (1 - \alpha)}{z - (1 - K \cdot G \cdot K_c \cdot (1 - \alpha))}$$

On obtient un nouveau  $\beta$

$$\beta = 1 - K \cdot G \cdot K_c \cdot (1 - \alpha)$$

Ce coefficient correspond aussi à la constante de temps du système en boucle fermée de telle sorte que,

$$\beta = e^{-\frac{T_e}{\tau_1} \cdot fact}$$

Avec *fact* facteur selon lequel on accélère le système.

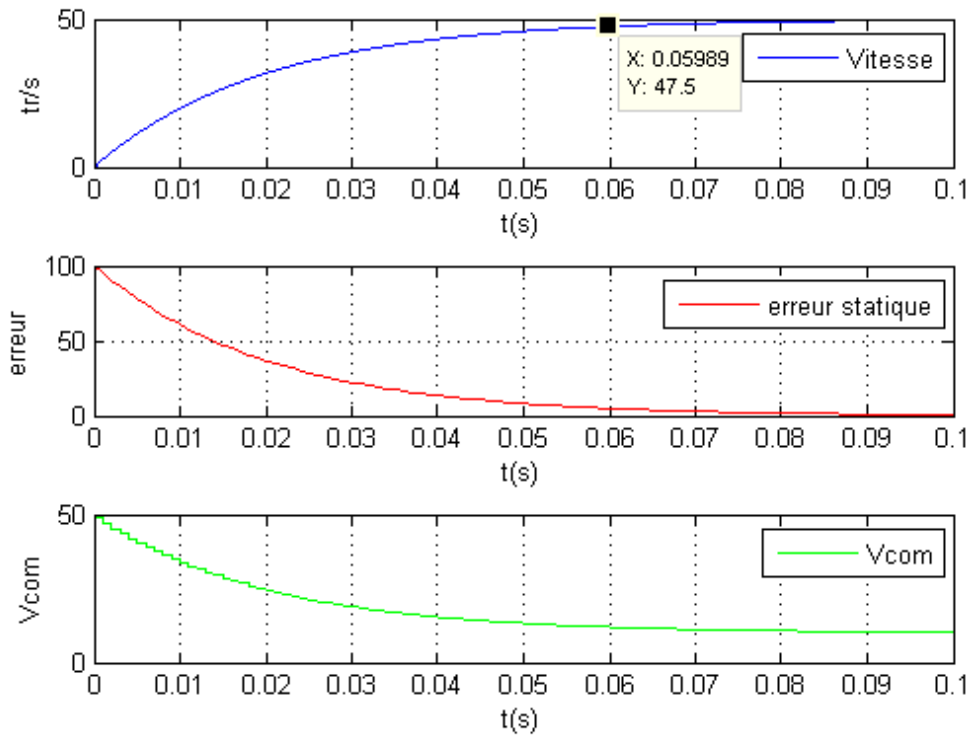
Nous pouvons donc exprimer la valeur des coefficients de notre correcteur.

$$\begin{aligned} a_1 &= K; \\ a_0 &= -K \cdot A; \\ b_1 &= 1; \\ b_0 &= -1; \end{aligned}$$

## ii. Simulation

### Premier ordre

Nous fixons la valeur de notre *fact* à 5 de façon à obtenir un système 5 fois plus rapide. On obtient la réponse suivante.



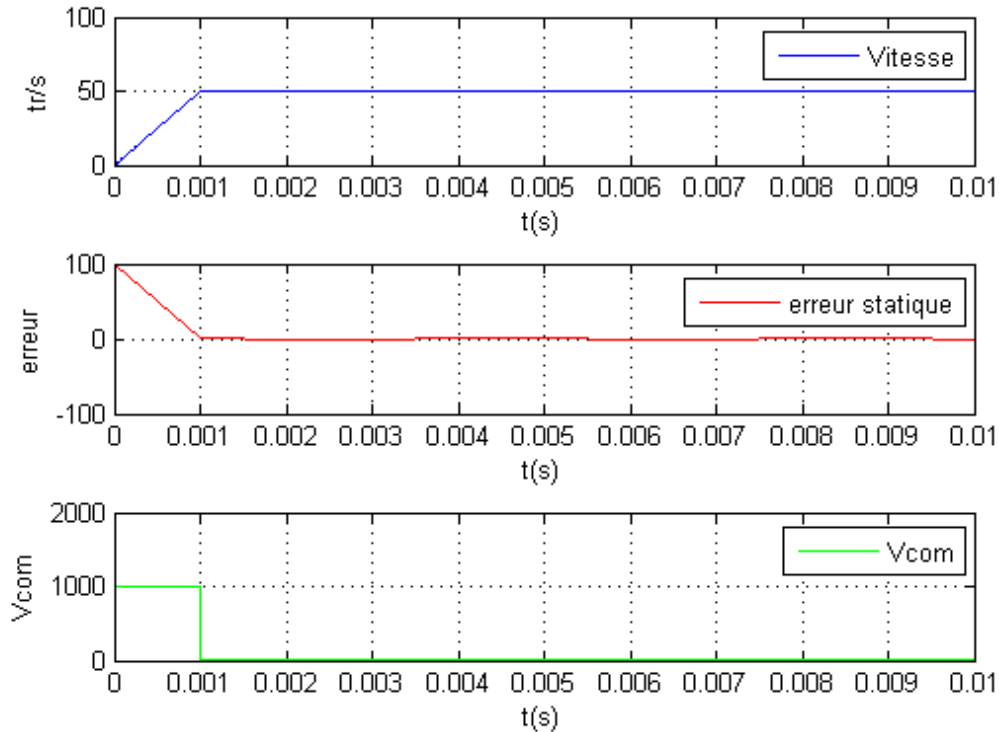
Réponse 1<sup>er</sup> ordre

La réponse est de type premier ordre. La valeur du temps de réponse obtenue correspond exactement à ce que nous souhaitons.

$$t_{5\%} = 3\tau_{BF} = \frac{3}{5}\tau_1 = 60ms$$

### Réponse pile

Nous savons que pour obtenir une réponse pile, il faut placer le pôle de la boucle fermée à 0. Nous en déduisons donc la valeur des coefficients correspondant.



### Réponse pile

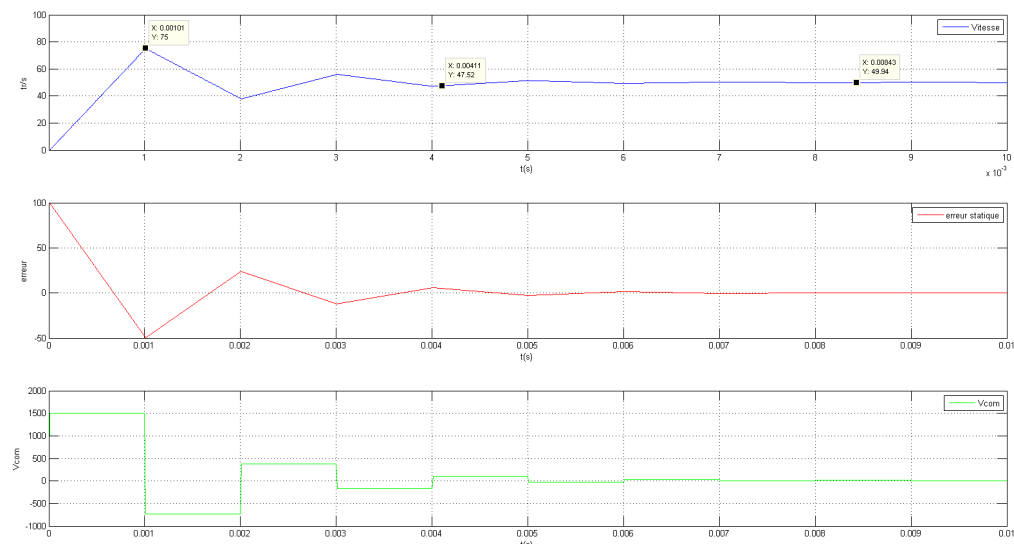
Le système répond exactement en un seul échantillon.

### Dépassement

On sait que pour obtenir une réponse avec un dépassement, il faut que,

$$\beta \in ] -1, 0 [$$

Nous fixons sa valeur à -0,5.



PO

Nous essayons de retrouver les valeurs obtenues en simulation par la théorie.

Pour cela nous exprimons la réponse temporelle du système.

$$s(kT_e) = \frac{G.K.(1-\alpha)V_{ref}}{(1-\beta)} \cdot [1-\beta^k]$$

On voit que le dépassement est obtenu pour le premier échantillon, nous calculons sa valeur avec l'expression précédente.

$$K = 1,5762$$

$$s(T_e) = 75$$

Nous retrouvons la même valeur que en simulation.

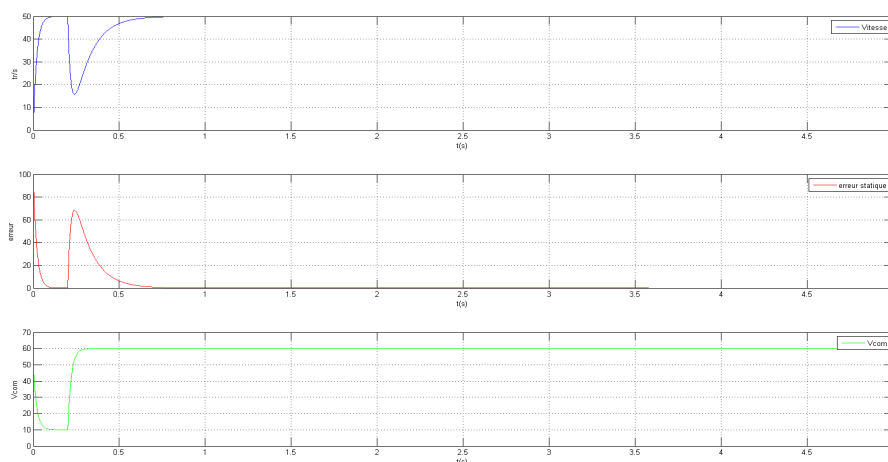
Pour ce qui est du temps de réponse à 5% on regarde à partir de quel échantillon la valeur est atteinte,

$$\frac{G.K.(1-\alpha)V_{ref}}{(1-\beta)} \cdot [1-\beta^k] = 47,5$$

$$\beta^k = 1 - 47,5 \cdot \frac{(1-\beta)}{G.K.(1-\alpha)V_{ref}}$$

### iii. Réponse à une perturbation

Nous simulons la réponse du système à une perturbation de type échelon.



Réponse du système à une perturbation de type échelon



On constate que la perturbation est rejetée. Cela est normal car nous avons un intégrateur placé en amont de celle-ci. En théorie nous pouvons donc rejeter n'importe quelle amplitude de perturbation. Sur un système réel cette valeur sera limitée par la saturation de la commande.

# ANNEXE 1

